理论地震学作业

苏文君柳

2019 年 6 月 10 日

目录

1 Johnson(1974) 中 (26) 式的证明

根据要求, 我们只需证明公式的后半部分, 即和 s 相有关的部分。注意，这里所谓的 S 波相并不完全是 S 波，这里只是便于叙述的方便将其成为 S 波相，P 波项也是类似。

对于自由表面解, 可知原文中的 equation(15)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(\xi_1,\xi_2,0,s;0,0,x_3') = &\frac{exp(-\nu_\alpha x_3')}{\mu d}\boldsymbol{M}(\xi_1,\xi_2,0,s,x_3')\boldsymbol{F} \\ &+\frac{exp(-\nu_\beta x_3')}{\mu d}\boldsymbol{N}(\xi_1,\xi_2,0,s,x_3')\boldsymbol{F}\end{aligned} \tag{1}$$

将上式进行关于 ξ_1 和 ξ_3 的 Laplace 变换，可得原文中的 equation(17)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(x_1, x_2, 0, s; 0, 0, x_3') = \frac{-1}{4\pi^2\mu}\int_{-i\infty}^{i\infty}(\frac{exp(-\nu_\alpha x_3')}{d}\boldsymbol{M}(\xi_1, \xi_2, 0, s, x_3')\boldsymbol{F} \\ +\frac{exp(-\nu_\beta x_3')}{d}\boldsymbol{N}(\xi_1, \xi_2, 0, s, x_3')\boldsymbol{F})\exp(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)d\xi_1 d\xi_2\end{aligned} \tag{2}$$

并且利用 de Hoop 变换

$$\xi_1 = s(qcos(\phi) - ipsin(\phi)) \tag{3}$$

$$\xi_2 = s(qsin(\phi) - ipcos(\phi)) \tag{4}$$

和 η_α 和 η_β 的表达式

$$\eta_\alpha = \sqrt{\alpha^(-2) + p^2 - q^2} \tag{5}$$

$$\eta_\beta = \sqrt{\beta^(-2) + p^2 - q^2} \tag{6}$$

我们可以得到

$$\gamma = \eta_\beta^2 + p^2 - q^2 \tag{7}$$

$$\sigma = \gamma^2 + 4\eta_\alpha\ 4\eta_\beta(q^2 - p^2) \tag{8}$$

通过对被积函数的一些性质分析，最后我们可以得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(x_1, x_2, 0, s; 0, 0, x_3') = \frac{s}{\pi^2\mu}Im(\int_0^\infty dp\int_0^{+i\infty}\frac{1}{\sigma}[exp(-st_\alpha)\boldsymbol{M}(q, p, s) \\ +exp(-st_\beta)\boldsymbol{N}(q, p, s)]\boldsymbol{F}dq)\end{aligned} \tag{9}$$

观察上式，如果可以将 $\int_0^{i\infty} e^{-st_\beta}dq$ 的部分整理成 $\int_0^\infty e^{-st}dt$，那么，在此积分号内部的则为待求的 Green 函数。我们只考察 S 波相的部分。问题在于两点：

- 目前的积分变量是 dq，需要换成 dt
- 积分的路径在虚轴上而不是在实轴

为了解决上述问题，我们需要考察 t_β 和 q 的关系，这个关系是通过之前进行 Laplace 变换定义而来

$$e^{-\nu_\beta x_3'}e^{x_1\xi_1 + x_2\xi_2} = e^{st_\beta} \tag{10}$$

经过一些基本关系式 (对于此问题的空间关系)，我们可以得到相应的表达式

$$t_\beta = -qrsin(\theta) + \eta_\beta rcos(\theta) \tag{11}$$

$$\eta_\beta = \sqrt{\alpha^{-2} + p^2 - q^2} \tag{12}$$

我们要求 t_β 是实数 (问题 2 的要求)，但是积分变量是 dq，因此考察 q 的变化范围

$$q = r^{-1}[-t_\beta sin(\theta) \pm cos(\theta)\sqrt{\frac{r^2}{\beta^2} + p^2r^2 - t_\beta^2}] \tag{13}$$

观察上式，我们可知，当 $\frac{r^2}{\beta^2} + p^2r^2 - t_\beta^2 < 0$ 时，q 会从实数跳跃到虚数，这个“起跳点”则是 $\frac{r^2}{\beta^2} + p^2r^2 - t_\beta^2 = 0$ 整理后可知 $t_\beta = r\sqrt{\beta^{-2} + p^2}$，再将 t_β 的表达式带入 (13) 中，即可求出起跳点的位置

$$q = -\sqrt{\beta^{-2} + p^2}sin(\theta) \tag{14}$$

注意观察 q 在复平面的行为，它在复平面的实轴上有四个支点，来源于 η_β 和 η_α 开根号的影响。经过分析可知四个支点为

$$q = \pm\sqrt{\alpha^{-2} + p^2} \tag{15}$$

$$q = \pm\sqrt{\beta^{-2} + p^2} \tag{16}$$

如果起跳点位于支点 $-\sqrt{\alpha^{-2} + p^2}$ 右侧，那么对路径积分是没有贡献的（既然起跳了就不会经过支点）。据此，$-\sqrt{\beta^{-2} + p^2}sin(\theta) < -\sqrt{\alpha^{-2} + p^2}$，整理后可知

$$sin(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha^{-2} + p^2}{\beta^{-2} + p^2}} \tag{17}$$

显然，对于 p，取值范围为 $[0, +\infty]$，因此临界状态为 0，那么最后的判断条件为

$$\theta < \theta_c = arcsin(\frac{\beta}{\alpha}) \tag{18}$$

如果满足上述条件，和 p 波的表达式类似，此处不再赘述，最后得到 Green 函数

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(x_1, x_2, 0, s; 0, 0, x_3') = \frac{1}{\pi^2\mu r}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{(t/r)^2 - b^{-2}}}} H(t - r/\beta) \\ Re(\eta_\beta\sigma^{-1}\frac{1}{\sqrt{(t/r)^2 - \beta^{-2} - p^2}}\boldsymbol{N})\boldsymbol{F}dp \end{aligned} \tag{19}$$

如果 $\theta > \theta_\beta$ ，那么就会经过负半轴第一个支点。为了更清晰的将积分变量进行替换，我们观察几个特殊的点，求出 q 和 t_β 的关系

$$t_\beta = 0; q = cos(\theta)\sqrt{\beta^{-2} + p^2} \tag{20}$$

$$t_\beta = rsin(\theta)\sqrt{(1/\alpha^2 + p^2)} + rcos(\theta)\sqrt{\beta^{-2} - \alpha^{-2}}; q = -\sqrt{\alpha^{-2} + p^2} \tag{21}$$

$$t_\beta = r\sqrt{\alpha^{-2} + p^2}; q = \frac{1}{r}q = -sin(\theta)\sqrt{\beta^{-2} + p^2} \tag{22}$$

请注意，我们的最终目标是求出在虚轴上的积分，这个过程是困难的，因此我们要利用复变函数的一些引理和定理。我们需要使用一条引理和一条定理：

- 大圆弧引理：大圆弧上的积分为 0
- 留数定理：复平面内闭合回路的积分等于所包围的奇点的留数

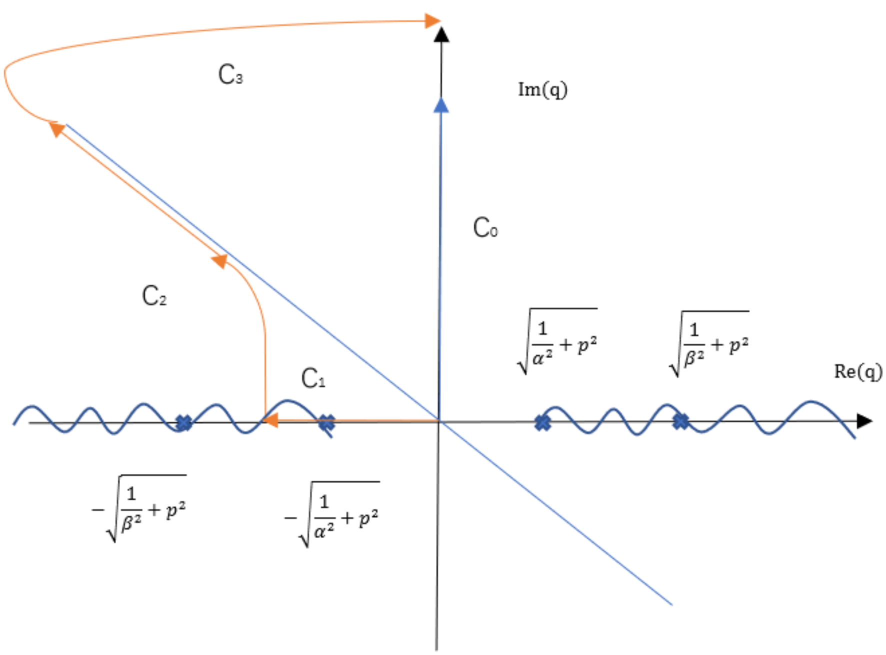


图 1: Cagniard-De Hoop 积分路径

对于图 1中，大圆弧引理保证了 $\int_{C_3} = 0$，对于一个积分回路，有

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} - \int_{C_0} + \int_{C_3} = 0 \tag{23}$$

(注意 C_3 的方向性，积分的时候我们保证是正区域，即顺着边界走，被积区域永远在右侧。此时应从无穷远处积分至原点，但是定义中 C_0 为原点到无穷远处)，经过简单的整理，可以知道

$$\int_{C_0} = \int_{C_1} + \int_{C_2} \tag{24}$$

积分从原点开始，不经过割线的地方对积分没有贡献（积分为实数，取虚部为 0），经过割线后开始产生贡献，因此 C_2 积分只计算支点到起跳点，根据前文，我们将积分变量 q 替换为 t_β，原先 q 的积分范围为 $[0, +\inf]$，那么现在 t_β 的积分范围为 $[rsin(\theta)\sqrt{(1/\alpha^2+p^2)}+rcos(\theta)\sqrt{\beta^{-2}-\alpha^{-2}}, r\sqrt{\alpha^{-2}+p^2}]$ 和 $[r\sqrt{\alpha^{-2}+p^2}, +\infty]$，因此可知

$$\begin{aligned} Im(\int_0^\infty dp \int_{c_0} \sigma^{-1} e^{-st_\beta} \boldsymbol{N} dq) = Im(\int_0^\infty dp \int_{r\sqrt{\alpha^{-2}+p^2}}^\infty \sigma^{-1} e^{-st_\beta} \frac{\partial q}{\partial t_\beta} \boldsymbol{N} dt_\beta) + \\ Im(\int_0^\infty dp \int_{rsin(\theta)\sqrt{(1/\alpha^2+p^2)}+rcos(\theta)\sqrt{\beta^{-2}-\alpha^{-2}}}^{r\sqrt{\alpha^{-2}+p^2}} \sigma^{-1} e^{-st_\beta} \frac{\partial q}{\partial t_\beta} \boldsymbol{N} dt_\beta) \end{aligned} \tag{25}$$

其中，前者的导数符号和后者的导数符号分别为

$$\frac{\partial q}{\partial t_\beta} = i \frac{\eta_\beta}{\sqrt{t_\beta^2 - r^2(t_\beta^2 + r^2)}} \tag{26}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t_\beta} = - \frac{\eta_\beta}{\sqrt{-t_\beta^2 + r^2(t_\beta^2 + r^2)}} \tag{27}$$

此时，结果已经和 Laplace 变换表达式十分接近。我们只需进行积分变换，将 t_β 放在外侧积分，再利用阶跃函数的性质，可将外侧整理成形如成 $\int_0^\infty e^{-st}dt$ 的形式，内部的结果即为 Green 函数。

对于式 (25)，反解 $t = t(p)$ 的表达式，整理成 $p = p(t)$ 的表达式，可知上下限的表达式为

$$p = \sqrt{(t/r)^2 - 1/\beta^2} \tag{28}$$

$$p = [(\frac{t/r - (\beta^{-2} - \alpha^{-2})(cos(\theta))}{sin(\theta)} - \alpha^{-2}]^{1/2} \tag{29}$$

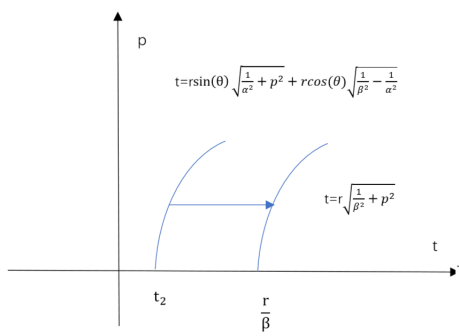


图 2: 先对 t_β 积分，再对 p 积分

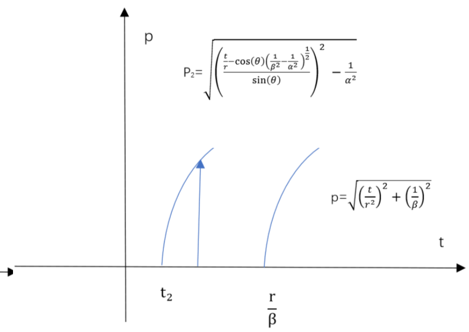


图 3: 先对 p 积分，再对 t_β 积分

交换积分次序后进行整理。最后，S 相的 Green 函数可以写成

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G} = \frac{1}{\pi^2\mu r}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\sqrt{(t/r)^2-1/\beta^2}} H(t-r/\beta)Re[\frac{\eta_\beta \boldsymbol{N}}{\sigma\sqrt{(t/r)^2-\beta^{-2}-p^2}}]dp \\
-\frac{1}{\pi^2\mu r}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{p_2} H(sin\theta-(\frac{\beta}{\alpha}))[H(t-t_2)-H(t-r/\beta)]Im[\frac{\eta_\beta \boldsymbol{N}}{\sigma\sqrt{\beta^{-2}+p^2-(t/r)^2}}]dp \\
-\frac{1}{\pi^2\mu r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sqrt{(t-r)^2-1/\beta^2}}^{p_2} H(sin(\theta)-\frac{\beta}{\alpha})H(t-r/\beta)Im[\frac{\eta_\beta \boldsymbol{N}}{\sigma\sqrt{\beta^{-2}+p^2-(t/r)^2}}]dp
\end{aligned} \tag{30}
$$

其中

$$
t_2 = \frac{r}{\alpha}sin(\theta)+\sqrt{1/\beta^2-1/\alpha^2}rcos(\theta) \tag{31}
$$

$$
p_2 = [(\frac{t/r-\sqrt{(\beta^{-2}-\alpha^{-2})}(cos(\theta))}{sin(\theta)}-\alpha^{-2}]^{1/2} \tag{32}
$$

2 基于 Matlab 的 (26) 式实现

2.1 程序编撰要点

Johnson(1974) 中 (26) 式的实现较为简单, 只需实现文中 (26) (34) 式即可, 但是在实际的操作过程中出现了两个问题.

- S 相的积分不能进行合并. 在实际编程过程中需要拆开
- 在积分内有一个可积奇点, 需要进行变量替换以消除这个奇点

其中，对于第一点，课程中已经有所提及。因此使用前节中最后得到的表达式进行计算。对于第二点，需要进行分析。观察表达式可知，奇点存在于 P 波项，S 波相的第一项，第三项中。我们可以使用变换 (按顺序分别为 p 波，s 波第一项、第二项、第三项)

$$\begin{aligned}
p &= ((t/r)^2 - \alpha^{-2})^{1/2} - v^2 \\
p &= ((t/r)^2 - \beta^{-2})^{1/2} - v^2 \\
p &= v \\
p &= ((t/r)^2 - \beta^{-2})^{1/2} + v^2 \\
q &= r^{-1}[-t_\beta sin(\theta) + icos(\theta)\sqrt{-\frac{r^2}{\alpha^2} - p^2r^2 + t_\alpha^2}] \\
q &= r^{-1}[-t_\beta sin(\theta) + icos(\theta)\sqrt{-\frac{r^2}{\beta^2} - p^2r^2 + t_\beta^2}] \\
q &= r^{-1}[-t_\beta sin(\theta) + cos(\theta)\sqrt{\frac{r^2}{\beta^2} + p^2r^2 - t_\beta^2}] \\
q &= r^{-1}[-t_\beta sin(\theta) + cos(\theta)\sqrt{\frac{r^2}{\beta^2} + p^2r^2 - t_\beta^2}]
\end{aligned} \tag{33}$$

此时，格林函数的表达式为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W} = \frac{2}{\pi^2\mu r}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{((t/r)^2-1/\alpha^2)^{1/4}} & H(t-r/\alpha)Re[\boldsymbol{M}\eta_\alpha\sigma^{-1}[2((t_\alpha/r)^2-\alpha^{-2})^{1/2}-v^2]^{-1/2}]dp \\
+\frac{2}{\pi^2\mu r}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{((t/r)^2-1/\beta^2)^{1/4}} & H(t-r/\beta)Re[\boldsymbol{N}\eta_\beta\sigma^{-1}[2((t_\beta/r)^2-\beta^{-2})^{1/2}-v^2]^{-1/2}]dp \\
-\frac{2}{\pi^2\mu r}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{p_2} & H(sin\theta-(\frac{\beta}{\alpha}))[H(t-t_2)-H(t-r/\beta)]Im[\frac{\eta_\beta\boldsymbol{N}}{\sigma\sqrt{\beta^{-2}+p^2-(t/r)^2}}]dp \\
-\frac{2}{\pi^2\mu r}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\sqrt{p_2-\sqrt{(t-r)^2-1/\beta^2}}} & H(sin(\theta)-\frac{\beta}{\alpha})H(t-r/\beta)Im[\frac{\eta_\beta\boldsymbol{N}}{\sigma(2\sqrt{-\beta^{-2}+(t/r)^2}+v^2)^{1/2}}]dp
\end{aligned} \tag{34}$$

另外，在测试中，使用了 Matlab 的 trapz 函数 (梯形积分函数)。发现在计算小于临界角的 Green 函数有效，但是对于大于临界角的 Green 函数无效。经过长时间尝试后，发现如果将被积函数写入 Matlab 的 m 文件中 (intcore)，再利用 integral 函数可以进行积分即可得到较为良好的结果。经过研究，可能是因为大于临界角时，积分的部分有可能是复数，对于此情况，

tarpz 函数可能无法进行计算。因此最后的程序文件为 main、calGreenFunc、intcore，之前采用的 trapz 方法的程序文件为 GreenFuncoldVersion

另外，虽然 Green 要求对 t 进行微分。但是 Johnson 的图件中结果并没有进行微分。

本次模拟所使用的介质参数为：$v_\alpha = 8.0km/h$,$v_\beta = 4.62km/h$,$\rho = 3.3g/cm^3$

2.2 程序结果

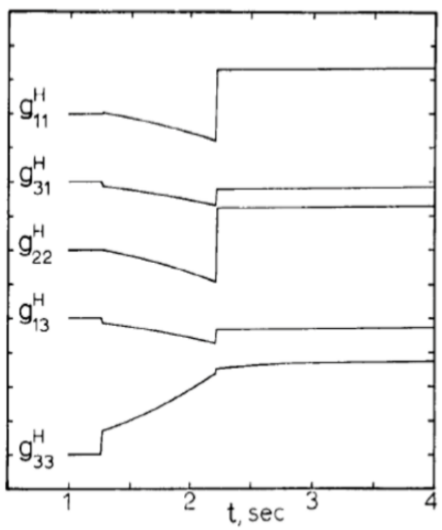


图 4: x_1=2,xi_3=10,Johnson(1979)

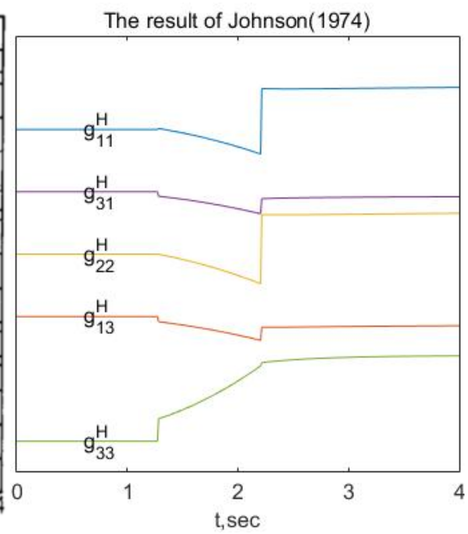


图 5: x_1=2,xi_3=10,matlab 结果

根据所给的参数，我们可以计算出理论的 P 波和 S 波到时分别为 $t = r/\alpha = 1.28s$,$t = r/\alpha = 2.20s$（假设 $r = 10.2km$），观察第一次结果可清晰看到 P 波和 S 波的初至时间，有十分明显的起跳。在第二次结果中，S 波之后出现了新的波动（g_{11}^H，g_{31}^H）。根据课程所学，判断是 Rayleigh 波。经过简单分析，第一次观测不到 Rayleigh 波可能是由于震源深度太深，Rayleigh 波衰减太大无法到达。值得注意的是 g_{22}^H 并没有受到影响。可见 P-SV 波和 SH 波是解耦的，二者互不影响。在第二次观测中，也可见 P 波和 S 波中的新起跳点，这个波显然不是 Rayleigh 波，只可能是沿着界面传播的转换波。

$$t = \frac{h}{\beta cos\theta} + \frac{x - htan\theta}{\alpha} \tag{35}$$

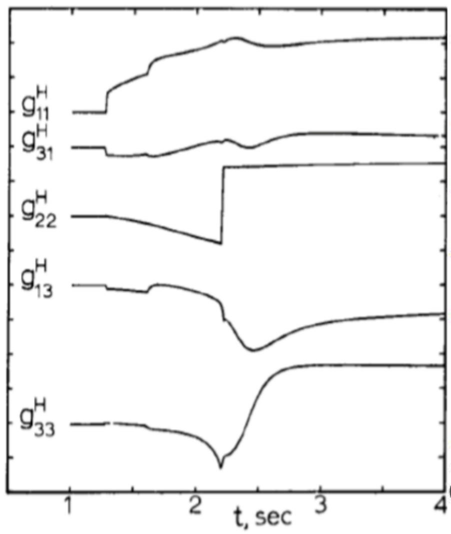


图 6: x_1=10,xi_3=2,Johnson(1979)

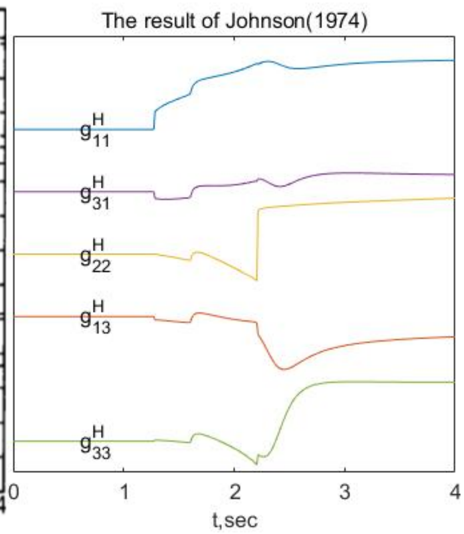


图 7: x_1=10,xi_3=2,matlab 结果

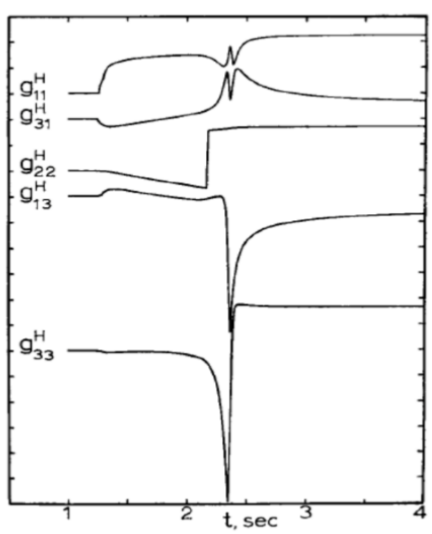


图 8: x_1=10,xi_3=0.2,Johnson(1979)

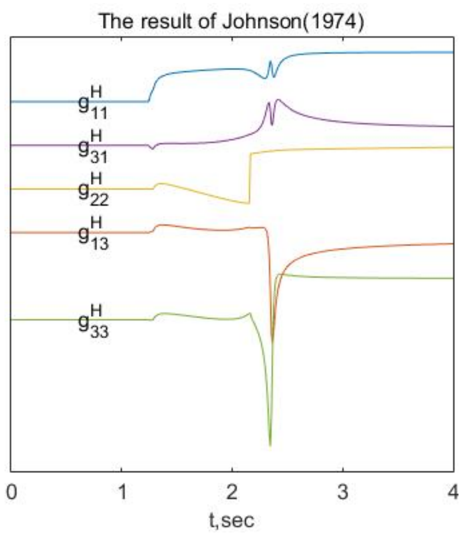


图 9: x_1=10,xi_3=0.2,matlab 结果

如果计算转换波的到时，可以判断其大概在 1.5s 左右到达，和图上结果是相符的。在第三次观测中，在 p 波和 s 波中间看不到起跳点，但是相比第一次观测，其振幅有明显增强，可能是转换波到时太快，和 p 波发生了重合。经过计算后发现其到时和 P 波到时相近，符合我们的推测。

3 基于 Fortran 的 (26) 式实现与对比分析

本章将叙述编译由 Fortran 编写的, 基于基函数展开的求解半无限均匀介质中的 Green 函数. 主要叙述在编译 Fortran 文件中的问题以及与第二章的结果进行对比.

3.1 f90 文件的编译

本次编译的系统环境为 Windows 10，最初采用的编译器和 IDE 为 intel visual fortran 和 Visual Studio。需要注意的地方有两处：第一，IVF 和 VS 有版本的要求，两者必须同为高版本或者同为低版本. 本次采用的版本为 IVF 2018 以及 VS 2013。第二，安装过程中需要先安装 VS 再安装 IVF，这样 IVF 可以对 VS 进行配置。IVF 可以利用学生邮箱（带 edu 后缀）申请学生版安装。

实际上，在使用 IVF 进行编译时，仍然遇到了一些问题。最后采用的编译器为 gfortran。由于 gfortran 需要 GNU 环境，因此还安装了 MinGW-w64 作为 GNU 的编译套件，然后安装 gfortran。最终 gcc 的版本为 8.1.0。

3.2 f90 文件的修改

在实际的编译过程中，如果采用 IVF+VS，可以编译成功，但是运行程序时 cmd 窗口显示以下信息后会进入死循环。

```
Coordinate of Obs. Point=(x1,x2,x3)
Coordinate of Src. Point=(xi1,xi2,xi3)
```

经过断点分析发现，程序始终在调用以下命令，最后找到的根的数值为 Inf。判断原因可能是在 IVF 组件的定义中，rootfind 函数和该程序下的

rootfind 函数不兼容。

```
    call rootfind(km, 1.0_dp/vs)
```

如果利用 gfortran 进行编译，那么在进行编译时会出现两个问题. 第一，在 mainf.f90 中, 以下命令无法编译

```
    open(2, file='CON', carriagecontrol='FORTRAN')
```

最后发现, 该命令仅涉及到显示和输出正在计算的频率, 故直接注释.

第二个问题则在 bessel.f90 中, 以下命令无法编译

```
    bessj1_s = sqrt(.636619772D0/ax)* &
    (cos(xx)*(p1+y*(p2+y*(p3+y*(p4+y*p5)))) &
    -z*sin(xx)*(q1+y*(q2+y*(q3+y*(q4+y*q5))))) &
    *sign(1.,x)
```

根据分析, 将 $sign(1.,x)$ 置换为 $sign(1D0,x)$, 并利用 gfortran 按顺序编译文件, 即可得到可执行文件. 运行后得到 dat 文件, 再利用 matlab 即可作图。为与 Johnson 和 Matlab 版本的结果做对比，作图时采用了之前方法的成图 m 文件。最后的结果如下图所示.

可见，Fortran 程序运行结果和 Jonhson 结果数值上有一定偏差，但是趋势是一样的。振幅不一样的原因可能是编译出问题，也可能是将曲线排布在一起时没有进行良好的归一化。相比于积分法，传播矩阵法由于在频率域进行计算，在进行 Fourier 变换时，理论上需要无穷个采样点进行参与计算，但在实际计算中是不可能做到的。如果增加采样点的个数，情况可能会有所改善，但是不会完全消除这样的情况。因此在 Green 函数变化的地方有一定的震荡，可见图 16所示。

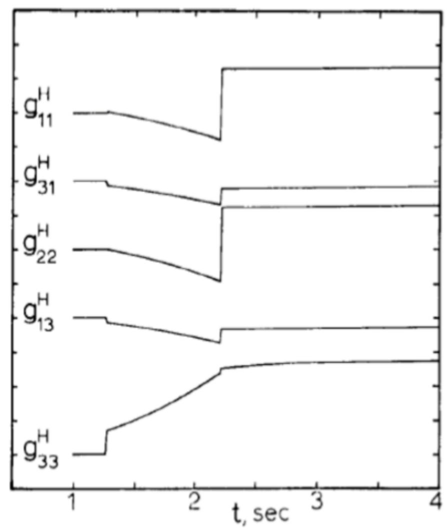


图 10: x_1=2,xi_3=10,Johnson(1979)

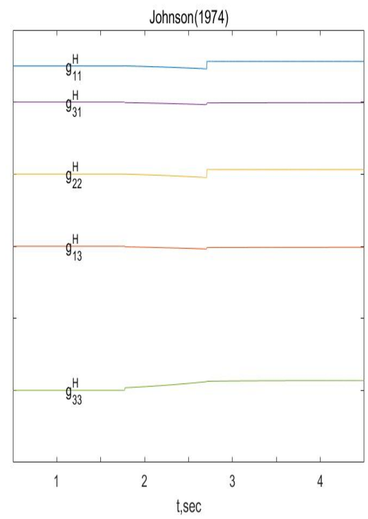


图 11: x_1=2,xi_3=10,fortran 结果

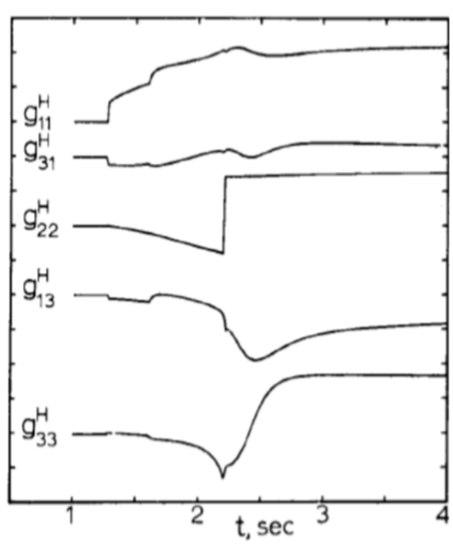


图 12: x_1=10,xi_3=2,Johnson(1979)

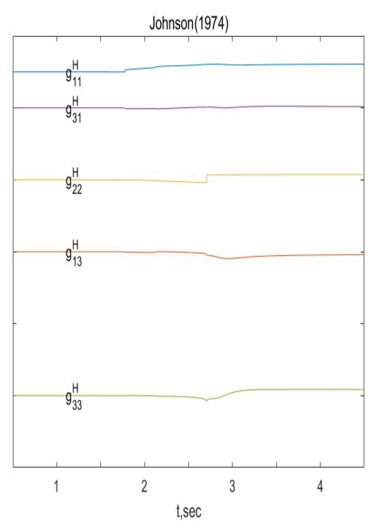
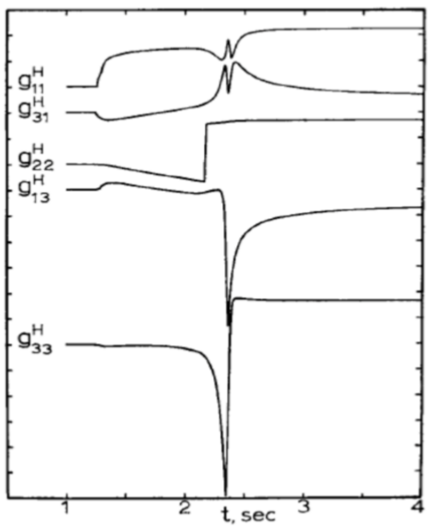


图 13: x_1=10,xi_3=2,fortran 结果



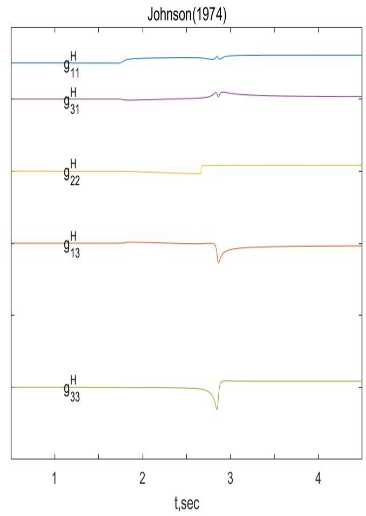


图 14: x_1=10,xi_3=.2,Johnson(1979)　图 15: x_1=10,xi_3=.2,fortran 结果

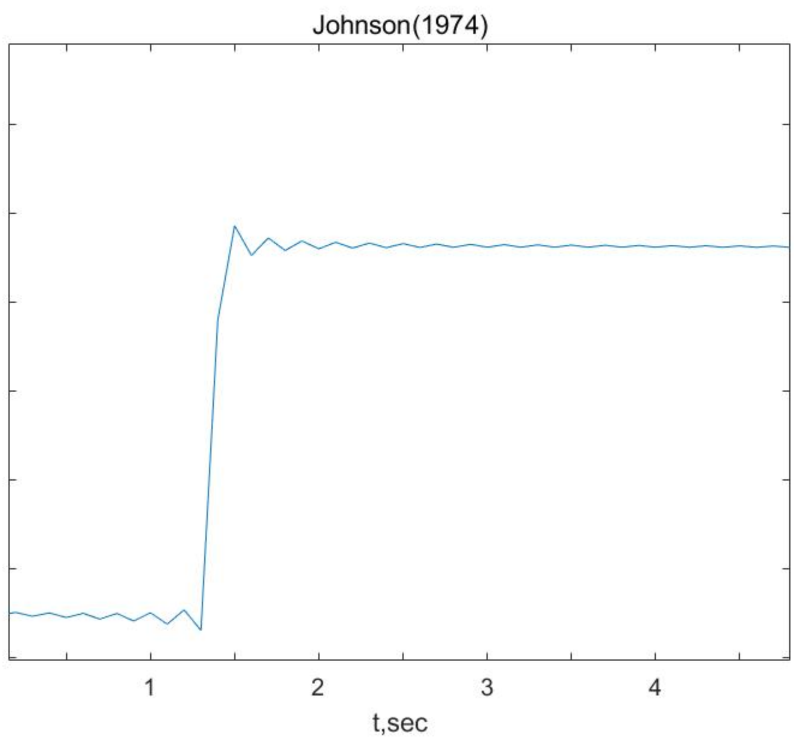


图 16: 函数震荡局部图 (图 11局部放大)